Transformée de Fourier d'une gaussienne

Proposition 1. *Si $\gamma_a(x) = e^{-ax^2}$ pour $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, alors $\widehat{\gamma_a} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\gamma_{\frac{1}{4a}}$.*

Démonstration.

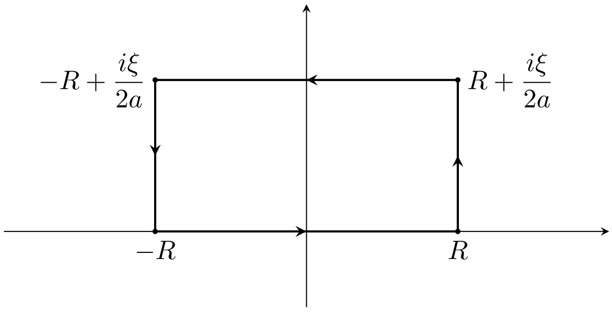
Soit $a > 0$. Pour tous $x, \xi \in \mathbb{R}$, on a :

$$ax^2 + ix\xi = a\left(x^2 + i\frac{x\xi}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{i\xi}{2a}\right)^2 + \frac{\xi^2}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{i\xi}{2a}\right)^2 + \frac{\xi^2}{4a}$$

On en déduit alors que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a :

$$\widehat{\gamma_a}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2 - ix\xi}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\left(x+\frac{i\xi}{2a}\right)^2 - \frac{\xi^2}{4a}}\, dx = e^{-\frac{\xi^2}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\left(x+\frac{i\xi}{2a}\right)^2}\, dx$$

Considérons la fonction complexe $z \mapsto e^{-az^2}$. Pour $R > 0$ et $\xi \in \mathbb{R}$ fixés, notons $\Gamma(R)$ le contour suivant :



On a ainsi :

$$\int_{\Gamma(R)} e^{-az^2}\, dz = \underbrace{\int_{-R}^{R} e^{-ax^2}\, dx}_{I_1(R)} + \underbrace{\int_0^{\frac{\xi}{2a}} e^{-a(R+it)^2}\, dt}_{I_2(R)} - \underbrace{\int_{-R}^{R} e^{-a\left(x+\frac{i\xi}{2a}\right)^2}\, dx}_{I_3(R)} - \underbrace{\int_0^{\frac{\xi}{2a}} e^{-a(-R+it)^2}\, dt}_{I_4(R)}$$

Or, on a, par changement de variable :

$$\lim_{R\to+\infty} I_1(R) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad \text{car} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

De plus, on a :

$$|I_2(R)| \leqslant \int_0^{\frac{\xi}{2a}} e^{-a(R^2-t^2)}\, dt = e^{-aR^2} \int_0^{\frac{\xi}{2a}} e^{at^2}\, dt \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$$

De la même manière, on obtient $\lim_{R\to+\infty} I_4(R) = 0$.
Il reste à étudier $I_3(R)$. Puisque l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\left(x+\frac{i\xi}{2a}\right)^2}\, dx$ converge absolument, on a :

$$\lim_{R\to+\infty} I_3(R) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\left(x+\frac{i\xi}{2a}\right)^2}\, dx = e^{\frac{\xi^2}{4a}}\widehat{\gamma_a}(\xi)$$

Puisque $z \mapsto e^{-az^2}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et que le contour $\Gamma(R)$ est fermé, le théorème de Cauchy donne :

$$0 = \int_{\Gamma(R)} e^{-az^2}\, dz = I_1(R) + I_2(R) - I_3(R) - I_4(R) \xrightarrow[R \to +\infty]{} \sqrt{\frac{\pi}{a}} + 0 - e^{\frac{\xi^2}{4a}} \widehat{\gamma_a}(\xi) - 0 = \sqrt{\frac{\pi}{a}} - e^{\frac{\xi^2}{4a}} \widehat{\gamma_a}(\xi)$$

On obtient finalement que :

$$\widehat{\gamma_a}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \gamma_{\frac{1}{4a}}(\xi)$$

□

Références

[El 08] M. El Amrani. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels.* Ellipses